T H E S E présentée

pour l'obtention

du

DIPLOME de DOCTEUR de 3e CYCLE

à

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
- Paris 6 -

BIBLIOTHEQUE
Mathématiques
Recherche
CENTRE INTERUNIVERSITAIRE JUSSIEU - ST-MEDARD

spécialité : maths

mention :

par M GUILLIOT Alain

Sujet de la thèse : Etude de quelques problèmes sur les groupes et hypergroupes et application à la recherche de lois à information complète.

soutenue le 25.5.78 devant la Commission composée de :

M ...FORTET... Président

M ...BERGE... examinateur

M ...CHEIN... «

M ...LAS VERGNAS... «

M ..... «

M ..... «

M ..... invité

BUPMC-MR P6/P7
D 314 084557 1

TABLE DES MATIERES.

Chapitre 0:Présentation.

Chapitre I:Stratégies continues pour les jeux positionnels.

Chapitre II:Processus récurrent pour l'étude des jeux positionnels.

Chapitre III:Jeux semi-positionnels.

Chapitre IV:Un jeu lié au problème du prolongement d'homomorphisme de graphes.

Chapitre V:Un théorème de représentation pour les hypergraphes vérifiant la p-propriété de Helly.

Chapitre VI:Problèmes de point fixe et propriété de Helly.

Chapitre VII:Problèmes de prolongement et propriété de Helly.

Chapitre VIII:Problèmes relatifs au jeu de poursuite et propriété de Helly.

NOTATIONS.

$H = (X, E_i)_{i \in I}$: On note ainsi un hypergraphe dont l'ensemble des sommets est X et l'ensemble des aretes une famille de parties E_i de X indexée sur I.

On note $|X| = n(H)$ la cardinalité de X et m(H) le nombre d'aretes de H.

On note aussi d(x) ou $d_H(x)$ le degré d'un sommet x de X, c'est a dire le nombre d'arète de H passant par x.

De même si G est un graphe, on note m(G) le nombre d'aretes de G, n(G) le nombre de sommets de G. On note d(x) ou $d_G(x)$ le degré d'un point x dans G, c'est a dire le nombre d'aretes de G passant par x.

n et p étant deux entiers positifs donnés, on note $\left[\frac{n}{p}\right]$ le nombre partie entière de $\frac{n}{p}$ et $\left[\frac{n}{p}\right]^{\cdot}$ le plus grand nombre entier supérieur ou égal a $\frac{n}{p}$

Soit G un graphe connexe: on note D(x,y) ou $D_G(x,y)$ la distance dans G du sommet x au sommet y.

On note alors B(x,p) ou $B_G(x,p)$ la boule dans G de centre x et rayon p.

Soit G un graphe sur un ensemble de sommets X et x un point de X; on note $_x$ le sous-graphe induit par l'ensemble(X-x).

Même notations pour les hypergraphes.

Soit H un hypergraphe et A une partie de l'ensemble des sommets: on note H_A le sous hypergraphe induit à partir de H par la partie A.

Une famille x_i de nombres réels indexés sur un ensemble I étant donnée on note alors $\inf_{i \in I} x_i$ le plus petit de ces nombres et $\sup_{i \in I} x_i$ le plus grand des nombres x_i.

PRESENTATION

Cette thèse se divise en huit chapitres, portant tous sur des résultats relatifs à des problèmes bien précis que l'on va résumer ici, en rappelant quelques définitions essentielles.

1er CHAPITRE

On rappelle tout d'abord la définition d'un jeu positionnel. Deux joueurs A et B, colorent chacun à leur tour, l'un par exemple en bleu, l'autre en rouge, les sommets d'un certain hypergraphe fini H. Le joueur A (attaquant) a pour but de colorer entièrement une arête de H, un point ne pouvant être coloré qu'une fois, le joueur B cherche à l'en empêcher (défenseur).

On sait que dans ces conditions, l'un des deux joueurs possède une stratégie gagnante.

On se pose ici le problème de l'existence de stratégies continues gagnantes c'est-à-dire de stratégies telles que :

Stratégie continue pour A : à chaque tour, A joue un

point contenu dans une même arête que le point immédiatement précédemment joué par lui et non encore annulée par B.

Stratégie continue pour B : à chaque tour, B joue dans une arête contenant le point juste précédemment joué par A et non encore annulée (sous réserve que cela soit possible)
On a alors les résultats suivants :

I - A peut posséder une stratégie gagnante, (même résultat pour B), sans posséder de stratégie gagnante continue.

II - On définit la propriété (P) sur les hypergraphes de la façon suivante :

$H = (X, E_i)_{i \in I}$ possède la propriété P

$\Leftrightarrow \forall J \subset I, \exists J' \subset J$ tel que

$$\bigcup_{i \in J'} E_i = \bigcup_{i \in J} E_i$$

et le graphe représentant la famille $(E_i)_{i \in J}$ est une union de chaînes disjointes.

on a alors le résultat.

Si l'hypergraphe $H = (X, E_i)$ est tel que pour tout $i, |E_i| \leq 3$ et si de plus H possède la propriété (P) alors si A possède une stratégie gagnante, on peut affirmer que cette stratégie peut être choisie continue.

Corollaire : Soit $H = (X, E_i)$ un hypergraphe possédant la propriété P et tel que pour tout i, on ait $|E_i| \leq 3$

Alors on peut dire que le défenseur B possède une stratégie gagnante dans le jeu associé.

L'intérêt de l'existence éventuelle de stratégiescontinues est immédiat pour la recherche d'algorithmespermettant de résoudre le jeu et leur passage à la machine.

2ème CHAPITRE

On reste dans les jeux positionnels et on s'intéresse ici aux processus récurents permettant de résoudre certains de ces jeux.

Le principal résultat est ici le suivant :

Soit $H = (X, \bigcup_{i=1}^{m} E_i)$, un hypergraphe n-uniforme, et le jeu positionnél associé pour les joueurs A et B. Alors on a : A admet une stratégie gagnante

$$\Rightarrow \quad m \geq 2^{n-1}$$

Si de plus on a :

$$\left.\begin{array}{l} m = 2^{n-1} \\ |X| = 2n-1 \end{array}\right) \quad \text{Alors H est du type suivant}$$

$$H = x_o \cdot \begin{matrix} x_1^o \\ x_1^1 \end{matrix} \Big| \cdots \Big| \begin{matrix} x_K^o \\ x_K^1 \end{matrix} \Big| \cdots \Big| \begin{matrix} x_{n-1}^o \\ x_{n-1}^1 \end{matrix}$$

Les points de H sont les points xo, x_1^0, x_1^1, —, x_{n-1}^1 ; les arêtes de H sont les transversaux minimum des couplages ci-dessus, augmentés du point xo.

Si on a $m = 2^{n-1}$ et $|X| = 2n$) Alors H est tel qu'il existe un point isolé y dans X.

et tel que H_y soit alors du type ci-dessus.

Dans la fin du chapitre, on rappelle quelques cas particuliers illustrant bien les méthodes utilisées.

3ème CHAPITRE

On s'intéresse ici au jeu nommé "semi-positionnel" c'est-à-dire au jeu qui se déroule de la façon suivante :

Soit H un hypergraphe, 2 joueurs A et B, un nombre R entier. Les 2 joueurs colorent à tour de rôle les sommets de H, un même sommet ne pouvant être coloré plus d'une fois, et cela jusqu'à ce que R sommets de H aient été colorés.

Le joueur A veut que l'ensemble des sommets colorés par lui et B constitue à un moment donné une arête de H; le joueur B cherche à s'y opposer.

On étudie dans ce cadre, des propriétés sur les hypergraphes, et en particulier le rapport entre le nombre d'arête d'un graphe G sur un ensemble de sommets X, et celui de l'hypergraphe T(G), dont les sommets sont aussi les points de X, et les arêtes les triplés contenant au moins une arête de G.

On obtient les résultats suivants :

Si on pose $H_{n,m} = \operatorname{Sup}_{\substack{m(G)=m \\ n(G)=n}} m(T(G))$

$\Phi_{n,m} = \operatorname{Inf}_{\substack{m(G)=m \\ n(G)=n}} m(T(G))$

Alors, on caractérise les graphes G tels que :

$m(G) = m$; $n(G) = n$

$m(T(g)) = H_{n,m}$ ou $m(T(G) = \Phi_{n,m}$

On calcule de plus $\Phi_{n,m}$ et on donne enfin une majoration sur $H_{n,m}$, à savoir

$$H_{n,m+1} - H_{n,m} \leq (n-2) - \left(\left[\frac{2m}{n} \right] - 1 \right)$$

On essaye enfin d'appliquer ces résultats, aux jeux semi-positionnels.

4ème CHAPITRE

On étudie le jeu suivant :

Soit G un graphe et H un cycle de longueur 4.

On nomme homomorphisme de G dans H, une application f des sommets de G dans ceux de H, telle que :

x et y adjacents dans G => f(x) et f(y) adjacent dans H. (Cette définition est générale à tous les graphes G et H). Deux joueurs A et B jouent à tour de rôle, en colorant à chaque tour un point x de G et en lui associant un point de H qu'on notera f(x).

Un point de G ne peut être coloré deux fois, et on doit garder la condition de cohérence suivante :

A (ou B) joue (x, f(x))

=> Pour tout couple (y,f(y)) précédemment joué par l'un ou l'autre des 2 joueurs, on a :

$$d_H (f(x), f(y)) \leq d_G (x,y)$$

d_H et d_G = distance dans H et G

A cherche à ce que soit ainsi fabriqué un homomorphisme de G dans H, B cherche à s'y opposer.

On démontre dans ce chapitre le résultat suivant :

G est un arbre => A possède une stratégie gagnante.

On se ramène pour la démonstration de ce résultat à l'étude d'un jeu "semi-positionnel".

5ème CHAPITRE

Le cinquième chapitre n'a pas trait à la théorie des jeux, mais à un problème de représentation pour les hypergraphes vérifiant la p-propriété de Helly, p étant un entier donné.

Rappel : soit $H = (X, E_i)_{i \in I}$ un hypergraphe.

On dit que H vérifie la p-propriété de Helly, si et seulement si on a l'implication :

$$\left(I' \subset I \;.\; \forall\, I'' \subset I' \text{ tel que } |I''| = p \Rightarrow \bigcap_{i \in I''} E_i \neq \varsigma\right)$$

$$\Rightarrow \left(\bigcap_{i \in I'} E_i \neq \Phi\right)$$

Quand p = 2, on parle de propriété de Helly.

On définit la représentation d'un hypergraphe E par un hypergraphe H de la façon suivante :

E représentable dans H

<=> , il existe une application injective α de l'ensemble X des sommets de E dans l'ensemble Y des sommets de H telle que :

$H_{\alpha(X)} = E$, et telle que $\alpha(X)$ soit une partie fidèle de H, c'est-à-dire telle qu'il existe une application B de Y dans $\alpha(X)$ telle que :

Pour toute arête F de H et tout sommet y de Y,

$y \in F \Rightarrow B(y) \in F \cap \alpha(X)$

Il a déjà été montré le résultat suivant :

Tout hypergraphe fini H vérifiant la propriété de Helly est représentable dans une famille de pavés de R^n pour n bien choisi.

On démontre ici le résultat plus général suivant :

Tout hypergraphe fini H dont les arêtes vérifient la p-propriété de Helly est représentable par une famille de p-pavés de $(R^{p-1})^n$ pour n bien choisi.

(p-pavés de $(R^{p-1})^n$ = produit de p-simplexes $S_1 \text{ — } S_n$, de R^{p-1}, R^{p-1} tout entier étant considéré comme un simplexe)

On s'appuie sur le résultat suivant :

Soit H un hypergraphe tel que :

$H = (X, E_i)_{i \in I}$ $\quad \forall\, i \in I \quad |E_i| \leq p$

$E \subset E'$ $\quad E'$ est une arête de H

$\Rightarrow$ E est une arête de H

Alors, H peut être considéré comme le p-hypergraphe représentatif d'une certaine famille de p-pavés de $(R^{p-1})^n$, pour n bien choisi.

Le p-hypergraphe représentatif d'une famille F de partie d'un ensemble X est l'hypergraphe ainsi fabriqué et noté $L_p(F)$:

Les sommets de $L_p(F)$ sont les éléments de F, et on a : $(F_1, \text{—} F_K)$ constitue une arête de $L_p(F)$

$\Leftrightarrow k \leq p$ et $F_1 \cap \cdots \cap F_K \neq \Phi$

6ème CHAPITRE

Soit G un graphe connexe, d_G la distance associée. On note famille des boules de G, l'ensemble des parties :

$B_G(x,p)$ = Boule pour la distance d_G, de centre x et de rayon p.

On note p-Homomorphisme de G dans G, une application f de l'ensemble des sommets de G dans lui-même telle que :

$\forall (x,y) \in G,\ d_G(f(x), f(y)) \leq p$

adjacents. Pour p = 2, on parle simplement d'homomorphisme. On démontre alors les théorèmes suivants :

I - Soit G un graphe connexe, dont la famille des boules vérifient la propriété de Helly, f un p-homomorphisme de G dans lui-même.
Alors il existe un point x de G tel que :

$d_G(x, f(x)) \leq p+1$

On utilise pour faire la démonstration de ce résultat, des résultats qui seront étudiés en détail au chapitre 7.

II - Soit G un graphe connexe, dont les boules vérifient la propriété de Helly.
Alors le groupe d'automorphisme de G admet une clique invariante.

On démontre enfin un résultat analogue pour les espaces topologiques.

III - Soit E un espace métrique compact, muni d'une distance d, tel que :

(1) $\forall p,q \in R^+ \quad (d(x,y) \leq p+q \Rightarrow B(x,p) \cap B(y,q) \neq \emptyset$
$\forall x,y \in E$

(2) Les boules $B(x,p)$, $x \in E$, $p \in R^+$, vérifient la propriété de Helly.

Alors on peut dire que le groupe d'isométries de E admet un point invariant.

On peut en fait trouver beaucoup d'extension à ces problèmes.

7ème CHAPITRE

On démontre et utilise ici le résultat suivant :

Soit G un graphe simple, au plus dénombrable, H un graphe fini, dont les boules vérifient la propriété de Helly.

Soit A une partie de G, et f une application de A dans H. Alors f est prolongeable en un homomorphisme f' de G dans H si et seulement si on a :

$$\forall\, x,y \in A,\ d_H\,(f(x),\ f(y)) \leq d_G\,(x,y)$$

Réciproquement, il est indispensable pour que cette condition donne le résultat que l'on ait le fait que les boules de H vérifient la propriété de Helly.

Ce principe de prolongement, basé sur l'utilisation de la propriété de Helly possède de nombreuses extensions à des problèmes d'espaces métriques, d'espaces ordonnés, de treillis, de graphes orientés, et il permet surtout de nombreuses applications :

On définit le produit cartésien de deux graphes de la façon suivante et on note $G \otimes H$ le graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des couples (x,y), $x \in G$, $y \in H$,

deux tels couples étant adjacents, si et seulement si :
(x,y) adjacent à (x',y')

⟺ x adjacent ou confondu à x'
y adjacent ou confondu à y'

On peut alors définir $I_{n,m}$ = Produit cartésien m fois répété de la chaîne I_n de longueur n, par elle-même.

Alors, le principe de prolongement permet d'affirmer que tout graphe G fini peut se plonger dans un certain graphe $I_{n,m}$, pour n et m bien choisis, c'est-à-dire que l'on peut trouver n et m, puis f de G dans $I_{n,m}$ tels que :
$\forall\, x,y \in G,\ d_{I_{n,m}}(f(x), f(y)) = d_G(x,y)$

On définit alors n(G) = (Inf m tel qu'il existe n avec G plongeable dans $I_{n,m}$)

Tous ces résultats sont utilisés pour la démonstration du premier théorème du chapitre précédent :

On s'intéresse ensuite au calcul du coefficient n(G) dans quelques cas particuliers.

Soit $J_{n,m}$ le graphe somme cartésienne m fois répétée de la chaîne de longueur n.

(somme cartésienne de 2 graphes simples G et H = graphe G + H dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des couples (x,y), $x \in G$, $y \in H$, 2 tels couples (x,y) et (x',y') étant adjacents dans G + H, si et seulement si on a :
x = x', y adjacent ou confondu à y'

ou bien : $y = y'$, x adjacent ou confondu à x'

on a alors $n(J_{n,m}) = 2^{m-1}$

Soit H un arbre possédant m sommet pendants :

On définit $n(m)$ par :

$$2^{n(m)-1} < m \leq 2^{n(m)}$$

On a alors $n(H) = n(m)$

Soit H un cycle de longueur n

on a alors : $n(H) = \left[\frac{n}{2} \right]$.

Là encore on peut prolonger l'étude des coefficients n(G) et de l'utilisation de ces coefficients bien plus loin. En particulier, on a beaucoup de propriétés très particulières pour les graphes G tels que n(G) = 2, mais cette étude n'est pas faite ici.

8ème CHAPITRE

On s'intéresse enfin au jeu de poursuite sur un graphe simple fini.

Soit G un tel graphe, 2 joueurs A et B se déplacent sur le graphe le long des arêtes de G, en jouant à tour de rôle. Le joueur A qui choisit le premier sa position initiale, cherche à rattraper le joueur B, qui cherche au contraire à lui échapper.

En utilisant le théorème de Zermelo, on définit un coefficient de poursuite C(G) relatif au graphe G, et on obtient les

résultats suivants : définissons d'abord un graphe contractile. On dit que G est contractile, s'il existe un entier n, un sommet x_o de G, et un homomorphisme f de $G \otimes I_n$ dans G tel que :

$$\forall\, x \in G,\quad f(x,o) = x$$

$$\forall\, x \in G,\quad f(x,n) = x_o$$

Alors, on peut donner le théorème suivant :
Soit un graphe simple. On a l'équivalence suivante :

> (C (G) = 1, c'est-à-dire que le joueur A peut rattrapper le joueur B dans le jeu de poursuite sur G)
>
> <=> G est contractile

On en déduit un autre résultat :

> Soit un graphe G, simple, dont la famille des boules vérifient la propriété de Helly.
>
> Alors, on a C(G) = 1

Là encore, ces résultats peuvent trouver de nombreuses extensions, en particulier en direction des espaces métriques, mais cela n'est pas fait ici.

CHAPITRE VII

APPLICATION DE LA PROPRIETE DE HELLY A DES PROBLEMES DE PROLONGEMENT

Rappel : Notion d'homomorphisme de graphe

Soit G et E deux graphes simples :

Soit f de E dans G, f est une application :

f est un homomorphisme de graphe de E dans G si et seulement si, l'image d'un couple de points adjacents est soit un point unique, soit un couple de points adjacents.

Problème de prolongement :

Soit E et G deux graphes, A une partie de E et f une application de A dans G.

A quelle condition pourra-t-on prolonger f en un homomorphisme f' de E dans G.

Ce problème qui reste très compliqué quand G est par exemple un cycle de longueur 4 (voir jeux de prolongement) a une solution très simple dans le cas particulier où les boules de G vérifient la propriété de Helly.

Rappel : Boules de G

Soit G un graphe fini, connexe, d_G la distance canonique associée.

On pose $B_G(x,p)$, $x \in G$, $p \in N$, l'ensemble des points y de G à une distance au plus égale à p du point x.

On note famille des boules de G, la famille des parties $B_G(x,p)$

THEOREME : Soit E et G deux graphes :

E est au plus dénombrable

G est fini, connexe. Les boules de G vérifient Helly.

Soit A une partie de E, f une application de A dans G.

Alors f est prolongeable en un homomorphisme f^* de E dans G si et seulement si on a la relation :

$$\forall x,y \in A,\ d_G(f(x),f(y)) \leq d_E(x,y)$$

La relation est visiblement nécessaire.

Supposons là vérifiée, et fabriquons par un processus récurrent, l'homomorphisme f^*

Soit $x_0 \in G$, $x_0 \notin A$. On pose $A' = A \cup (x_0)$

Il suffit de montrer que l'on peut prolonger f en f' de A' dans G, en trouvant un certain $y_0 = f'(x_0)$ tel que : $\forall x,y \in A'$

$$d_G(f'(x),f'(y)) \leqslant d_G(x,y)$$

c'est-à-dire tel que :

$$\forall x \in A,$$

$$d_G\,(f(a),\, y_0) \leq d_E\,(x, x_a)$$

On concluera alors aisément de proche en proche

y_0 doit être en fait choisi tel que :

$$y_0 \in \bigcap_{x \in A} B_G\,(f(x),\, d_E(x, x_0))$$

Ces boules sont d'intersection deux à deux non vide, d'après la relation de départ.

les boules de G sont de Helly.

=> ces boules sont d'intersection globalement non vide et on a le résultat.

La propriété de Helly relative aux boules de G est nécessaire. Supposons que cette propriété ne soit pas vérifiée.

Il existe dans G, une famille de points, y_1 — y_n, et une famille d'entiers, p_1 — p_n telle que :

$$\forall i \neq J \quad d_G\,(y_i, Y_J) \leq p_i + P_J$$

$$\bigcap_{i=I}^{n} B_G\,(y_i, p_i) = \phi$$

Soit alors E l'arbre ainsi fabriqué :

Posons $A = (x_1 — x_n)$ et $f(x_i) = y_i$, pour tout i de 1 à n.

f vérifie la condition de cohérence :

$$\forall\, x,y \in A \quad d_G\,(f(x),f(y)) \quad \leq \quad d_E\,(x,y)$$

Il est pourtant visible qu'il ne sera jamais possible de prolonger f à E tout entier.

Exemple de graphes dont les boules vérifie la propriété de Helly.

THEOREME : Les boules d'un produit cartésien d'une famille finie d'arbres vérifient la propriété de Helly.

C'est à peu près immédiat.

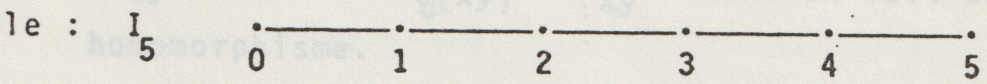
On peut bien sûr résoudre beaucoup d'autres problèmes de prolongement sur le même principe de démonstration (prolongement respectant des relations d'ordres sur des treillis, des isométries sur les espaces métriques, des graphes orientés).

COEFFICIENT DE PLONGEMENT POUR UN GRAPHE SIMPLE FINI

Définition : $m, n, \in N$

On note I_n, le graphe chaîne de longueur n.

Exemple : I_5



On note $I_{n,m}$ le produit cartésien m fois répété de la chaîne de longueur n par elle-même.

(Rappel : Produit cartésien de 2 graphes simples G et H = G ⊗ H : graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des couples (x,y) ou x est dans G et y dans H, 2 couples (x,y), (x', y') étant adjacents dans G ⊗ H si et seulement si on a :

x et x' adjacents ou confondus

y et y' adjacents ou confondus

THEOREME : soit G un graphe simple fini.

$\exists$ n et m $\in$ N, tels que G soit plongeable dans $I_{n,m}$ c'est-à-dire tel qu'il existe un homomorphisme f de G dans $I_{n,m}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in G, \; d_{I_{n,m}}(f(x), f(y)) = d_G(x,y)$$

Il suffit pour obtenir ce résultat, d'appliquer le théorème sur le prolongement de la façon suivante :

CHAPITRE VIII

JEUX DE POURSUITE ET PROPRIETE DE HELLY

Définition : Soit G un graphe fini.

Deux joueurs A et B se déplacent à tour de rôle, dans G, à chaque fois le long d'une arête (ou éventuellement restent sur place). Le joueur A cherche à se rapprocher le plus du joueur B qui cherche au contraire à lui échapper. Le joueur A joue en premier.

Le théorème de Zermelo permet de définir un coefficient C(G) qu'on notera coefficient de poursuite, et qui est tel que :

A possède une stratégie, qui pour toute stratégie de B, lui permet à un moment donné de se trouver à une distance au plus égale à C(G) - 1 de B. B possède une stratégie qui dans toute partie jouée par lui selon cette stratégie, lui permet à l'issue de chaque tour de laisser A à une distance supérieure ou égale à C(G).

Exemple : $C(I_n) = 1$

Contractibilité d'un graphe

Soit G un graphe fini. G sera contractile si et seulement si il existe un entier n, un point x_0 de G et il existe un homomorphisme f de $G \otimes I_n$, produit cartésien de G et de I_n, dans G tel que :

$$\forall x, \quad f(x,o) = x$$
$$\forall x \in G \quad f(x,n) = x_o$$

THEOREME : Soit G un graphe fini, et C(G) le coefficient de poursuite associé.

On a l'équivalence suivante :

$C(G) = 1 \iff$ G est contractile

Démonstration : Montrons la proposition dans le sens $\Rightarrow$

Montrons d'abord le résultat suivant :

$C(G) = 1 \Rightarrow \exists$ x et y dans G tel que

$\forall$ z adjacent à x $\Rightarrow$ z adjacent à y

Supposons l'inverse, et à l'issue du n ème tour, A en x et B en y, avec $d_G(x,y) \geq 2$

A se déplace en x'

$d_G(x',y) \geq 2 \Rightarrow$ B reste en y

$d_G(x',y) = 1 \Rightarrow d_G(x,y) = 2$

Alors, il existe z, adjacent à y et non adjacent à x';

B se déplace en z et on a $d_G(x', z) = 2$.

On conclut alors par récurrence que B peut rester à l'issue de chaque tour à une distance supérieure ou égale à 2 de A.

$\Rightarrow C(G) \geq 2$, d'où le résultat.

Montrons qu'alors, on peut considérer G comme contractile.

Soit x_0 et y_0 tels que: x_0 adjacent à y_0 ; $x_0 \neq y_0$;

; $\forall$ z adjacent à $x_0 \Rightarrow$ z adjacent à y_0.

Posons $G' = G - (x_0)$ = sous graphe G_{x_0}.

$C(G) = 1 \Leftrightarrow C(G_{x_0}) = C(G') = 1$

En effet, si A possède une stratégie V' dans le jeu associé à G', lui permettant de rattrapper B, A joue dans G selon la stratégie V ainsi fabriquée:

A joue en restant dans G' comme s'il pourchassait le mobile p(B) placé en x si B est en $x \neq x_0$ et en y_0 si B est en x_0.

A rattrape à un moment donné p(B), c'est-à-dire que A vient se placer en y_0 où p(B) est installé.

Mais alors B est en x_0 ou en y_0 et ne peut aller qu'en un point adjacent à y_0, d'où le résultat.

On procède alors par récurrence.

- Supposons G' contractile.

Il existe un homomorphisme f' de $G' \otimes I_n$ dans G', et un point x'_o de G' tel que :

$$f'(o,x) = x \qquad \forall\, x \in G'$$
$$f'(n,x) = x'_o \qquad \forall\, x \in G'$$

On pose alors $f(o,x) = x \quad \forall\, x \in G$

$$f(1,x) = x \quad \forall\, x \in G'$$
$$f(1,x_o) = y_o$$
$$f(p+1,x) = f'(p,x) \quad \forall\, p \;\; 1 \le p \le n \;\; x \in G'$$

$$f(p+1, x_o) = f'(p,y_o) \quad \forall\, p \;\; 1 \le p \le n$$

On vérifie alors qu'on obtient une contractibilité de G, d'où le résultat.

- Réciproquement, montrons le sens $\Longleftarrow$

Supposons G, contractile

Soit donc, f de $G \otimes I_n$ dans G tel que

$$f(x,o) = x \qquad \forall\, x \in G$$
$$f(x,n) = x_o \qquad \forall\, x \in G \qquad x_o \text{ fixé dans G.}$$

A joue son premier tour en x_o

B se place en $x \in G$

Alors A joue en $f(x,n-1)$ adjacent à x_o

B se place en x' adjacent à x

A se place en f(x',n-2) adjacent à x'

et ainsi de suite.

A l'issue du (n+1)è tour, B venant de se placer en un point x_n, A se placera en $f(x_n,o) = x_n$ et rattrapera

B en utilisant cette stratégie, d'où le résultat.

THEOREME : G est un graphe fini,

Les boules de G sont de Helly

$\Rightarrow C(G) = 1$

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que G est contractile.

On va donner de ce résultat, deux démonstrations:

1è démonstration :

Posons n tel que :

diamètre de $G \leq 2^n$

Alors il existe $x_0 \in G$ tel que :

$\forall\, x \in G,\ d_G(x_0,x) \leq n.$

Il suffit dé voir que l'intersection des boules

$\bigcap_{x \in G} B_G(x,n)$ est non vide, en appliquant la propriété de Helly.

De plus, pour tout entier p, la boule de centre x_0 et rayon p, constitue un sous-graphe de G connexe, et stable pour la distance, c'est-à-dire que si je pose $G_p = B_G(x_0,p)$, alors $\forall\, x, y \in G_p$ on a :

$$d_{G_p}(x,y) = d_G(x,y).$$

En effet, soit la famille des boules :

$B_G(x_o,p)$, $B_G(x,1)$, $B_G(y, d_G(x,y) - 1)$

Ces boules sont d'intersection deux à deux non vides

$\Rightarrow$ D'après Helly, il existe $z \in G_p$ tel que :

$$d_G(x,z) = 1 \qquad d_G(z,y) = d_G(x,y) - 1$$

On conclut par récurrence sur $d_G(x.y)$

Enfin, les boules dans G_p, qui sont les traces des boules de G centrées dans G_p, vérifient dans ces conditions la propriété de Helly.

On procède alors par récurrence sur n.

G_{n-1} est (n-1)-contractile, c'est-à-dire qu'il existe un homomorphisme de contractibilité de $G_{n-1} \otimes I_{n-1}$ dans G_{n-1}.

Soit h cet homomorphisme, on suppose que :

$h(o,x) = x \quad \forall\, x \in G_{n-1}$

$h(n-1,x) = x_o \quad \forall\, x \in G_{n-1}$

On fabrique alors une retraction g de G dans G_{n-1}, c'est-à-dire un homomorphisme de G dans G_{n-1} laissant stable chaque élément de G_{n-1}.

x étant dans $(G_n - G_{n-1})$, la propriété de Helly pour les boules de G, permet d'écrire qu'il existe z dans

$$B_G(x,1) \cap (\cap B(y,1) \cap B(x_o,n-1)$$

(y adjacent à x)

Je pose alors $g(x) = z$

g est alors une retraction de G dans G_{n-I}

De plus, on peut dire que x étant adjacent ou confondu avec y, g(x) est adjacent ou confondu avec g(y) et avec y.

Posons alors : $f(o,x) = x$, x étant dans G

$f(1,x) = g(x)$

$f(p,x) = h(p-1,g(x))$, x étant dans G,

p étant un entier vérifiant : $n \geq p \geq 2$.

On a bien une application exprimant la n-contractibilité de G et de surcroît : $\forall x, f(n,x) = x_o \in G$

On conclut par récurrence.

2è démonstration

Soit $A \subset G \otimes I_n$; diamètre de $G \leq 2n$;A défini par:

$A = ((x,o), x \in G) \cup ((x,n), x \in G)$

Soit f de A dans G, application :

$f(x,o) = x$

$f(x,n) = x_o$, où x_o est défini par :

$\forall x$; $d_G(x_o,x) \leq n$. (x_o existe).

On a alors visiblement :

$\forall \alpha,\beta \in A \quad d_G(f(\alpha), f(\beta)) \leq d_{G \otimes I_n}(\alpha,\beta)$

Les boules de G vérifient Helly

=> le théorème de prolongement permet de conclure à l'existence d'un prolongement f , homomorphisme de $G \otimes I_n$ dans G, tel que

$$\forall \alpha \in A, \quad f^{\bullet}(\alpha) = f(\alpha)$$

On a alors le résultat.

Tous les résultats ci-dessus, peuvent trouver des généralisation pour les espaces topologiques munis d'une distance d vérifiant la propriété (P) :

$$\forall\, x,y \in [\varepsilon] \qquad d(x,y) \leq p+q$$

$$\forall\, p,q \in R^{+} \quad \Rightarrow \underset{\varepsilon}{B}(x,p) \cap \underset{\varepsilon}{B}(y,q) \neq \phi$$

E compact

BIBLIOGRAPHIE.

Chapitre I: Hales and Jewett;Régularity and positionnal games

TRANS A.M.S 106 1963 222-229

Berge C:Graphes et hypergraphes ;édité chez Dunod.

Chapitre 17

Chapitre II:Berge C:Vers une théorie générale des jeux positionnels.
Cahiers du centre d'études de recherches opérationnelle (Bruxelles),18,(1976) 91-107

Berge C et Las Vernas:Un nouveau jeu positionnel,le "Match-it",
ou une construction dialectique des couplages parfaits.
Cahiers du centre d'études de recherche opérationnelle 18,n°1,1976.

Lehman A:A solution of the Shannon switching game,J;Soc;Industr;appl.
Math.12,1964,687-725.

Chvatal et Erdos:A biased positionnal game.

Reconstruction conjecture:Lecture Notes in Mathématics.
n° 406 Graphs and Combinatorics
page 18

Chapitre III:Berge C:Graphes et hypergraphes.Edité chez Dunod.
Chapitre 17.

Chapitre IV:Hedetniemi.S.T.:"Homomorphismes de graphes".University of Michigan.
Technical report 03105-42-T December 1965.

Duchet:Intervalles et combinatoire.
Séminaire "La theorie des graphes et les problèmes combinatoires"
(C;Berge,M.Las Vergnas)

Chapitre V:Propriété de Helly et problèmes de représentation
par Pierre Duchet (C.N.R.S.,Paris) : A paraître.

A;Schrijver ;Graphs and supercompacts spaces.

Afdeling zuivere wiskunde ZW 37/74 december.

Mathematisch centrum Amsterdam.

P.Gilmore:A characterisation of comparability graphs.Canad.J.Math,16,1964,539-548.

Chapitre VI:D.R.Smart.Cambridge Tracts IN mathematics.

66. Fixed point théorems.

Pavol Hell.Absolute retracts in graphs.

Lecture Notes in Mathematics;406 .Graphs and combinatorics.

Norman Biggs:Finite Groups of Automorphisms.

London Mathematics Society;Lecture Notes Series. 6.

Cambridge University Press.

Chapitre VII:Hedetniemi.S.T:"Homomrphismes de graphes".University of Michigan.

Technical Report 03105-42-T.December 1965.

Harary.F:Graph Theory. Addison-Wesley.Reading,Mass,1969.

Chapitre VIII:Isaacs.R:Jeux Differentiels; Edité chez Dunod.

Berge.C:Theorie generale des jeux a n personnes.(page 8)

Memorial des sciences mathematiques;fascicule CXXXVIII

Harary.F:Graph Theory. Addison-Wesley;Reading,Mass,1969.